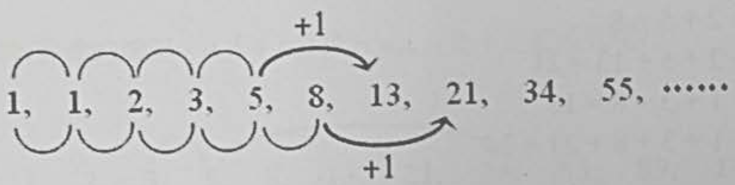
學生作品

費氏數列（Fibonacci Sequence）的神奇性質

I. 如果你把前五個費氏數加起來再加 1，結果會等於第七個費氏數（$1+1+2+3+5+1=13$）；如果把前六個費氏數加起來，再加 1，就會得出第八個費氏數（$1+1+2+3+5+8+1=21$）。



那麼前 n 個費氏數加起來再加 1，會不會等於第 $n+2$ 個費氏數呢？

$a_1 + a_2 = a_3$

試想想如何証明?

$a_4 + a_5 = a_6$

$a_{k+1} + a_{k+2} = a_{k+3}$

對於費氏數列 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

設命題為 $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + 1 = a_{n+2}$

當 n=1

$\cancel{a_{1+2} = a_1 + 1 = a_{1+2}}$

左方 $= a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

右方 $= a_{1+2} = a_3 = 2$

n=1 原式成立

對於任意自然數 n，假設 n=k 時等式成立，即

$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_k + 1 = a_{k+2}$

考慮 n=k+1

$\cancel{左方\ a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + 1 = a_{k+1+2}}$

左方 $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + 1 = a_{k+2} + a_{k+1}$

$= a_{k+3}$

$= a_{\underline{k+1}+2}$

故 n=k+1 時等式成立

右方 a_{n+2}

由數學歸納法得証，$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + 1 = a_{n+2}$。

2. 試證明兩個連續三角形數的和 $= n^2$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2}$$

$$= \frac{2n^2}{2}$$

$$= n^2$$

3. 55, 5050, 500500 , 50005000 ... 都是三角形數，為甚麼？

$\cancel{55 \times 2 = 110 = 11 \times 10}$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 55$$

$$n(n+1) = 55 \times 2$$

$$\therefore n(n+1) = 110$$

$$n(n+1) = 11 \times 10$$

$$n(n+1) = (10+1) \times 10$$

$\cancel{n+1 = 11}$

$$n = 10$$

同例 $5050 = \frac{n(n+1)}{2}$

$$10100 = n(n+1)$$

$$(100+1)100 = n(n+1)$$

$$n = 100$$