Extension Reading Materials and Worksheet

中國數學家與畢氏定理

畢氏定理的名稱

幾何學裏有一個非常重要的定理—畢達哥拉斯定理(或簡稱畢氏定理)。畢達哥拉斯是約於公元前 500 年的希臘哲學家、天文學家、數學家和音樂家。雖然這定理稱為畢氏定理，但是仍然有討論指出有比畢達哥拉斯更早的數學家已發現這定理。在我國，這個定理稱為勾股定理，或在台灣省稱為商高定理。勾、股是指直角三角形內較短的兩邊（弦是指三角形內的斜邊），而商高則是約於公元前 1100 年周朝時代的人物。這兩個名字均出現於我國有名的《周髀算經》內。

在中國流傳至今最古老的一部天算典籍《周髀算經》中，第一章便記述周公與商高[1]的問答，由於商高的答辭中論述了勾股定理的特例“句[2]廣三，股修四，徑隅五”的內容。除此，在《周髀算經》卷內之二記載榮方與陳子問答中，亦有陳子講述：「句股各自乘，并而開方得之」。用現代數學符號表示，即是 $a^2 + b^2 = c^2$，其中 a、b 及 c 分別是直三角形的兩邊而 c 是斜邊。可見在當時已知句股定理。

雖然《周髀算經》的成書年代估計為在公元前一世紀至公元一世紀[3]，不過書中內容則可能在成書前便已產生，如公元前十一世紀[4]。因此歷來便有討論，“勾股定理”在中國何時已有嚴格的證明及應否將畢氏定理正名為勾股定理。

勾股定理不僅是最古老的數學定理之一，也是數學中證法最多的一個定理，幾千年來，人們已經發現了 400 多種不同的證明方法，足以編成厚厚的一本書。

閱讀以下段落並回答問題。

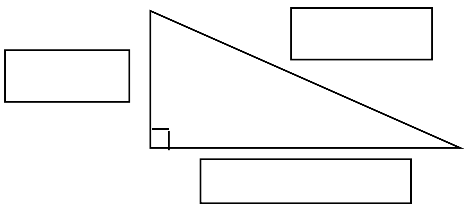
1. (a) 列出相等於畢氏定理的名稱。

____

(b) 有多少個已知證明畢氏定理的方法？

____

2. 在圖中於對應位置寫出三角形內的“勾”、“股”、“弦”的名稱。



[1] “從「中國方志從書 商南縣志」卷八 “人物志”中查獲一條有關商高生平的記載：[周] 商高，黃帝之昆孫。以地得姓。周初封子男於商。精數學，[周髀]衍其說為算經。「國語」曰司商。” 曲安京(1996)

[2] “句”為”勾”的古字。

[3] 李儼(1992)。《中國古代數學簡史》第 32 頁。

[4] 關於「商南縣志」及上述文字的作者及出處，.....，十分可信，商高為西周初期(約公元前十一世紀)的數學家殆無疑問。” 曲安京(1996)

Extension Reading Materials and Worksheet

3. (a) 在希臘，畢氏定理大約於那年被“發現”出來呢？

____

(b)《周髀算經》大約於那年出現？為何不能準確說出勾股定理的出現年份？

____

____

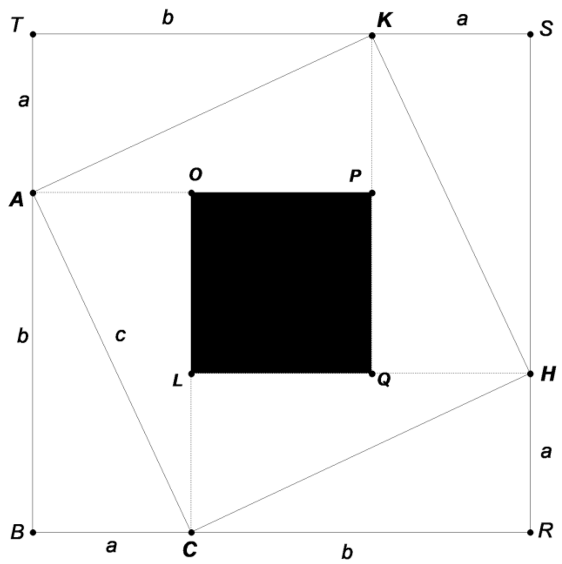
(c) 解釋為何有言論指畢氏定理應稱為勾股定理。

____

____

趙爽的證明方法

趙爽(約於公元 300 年)在為《周髀算經》內勾股定理作注釋，所用的證明方法，在以下方空格內將該證明以數學語言重新改寫。



證明：

Lessons 1 -2

Extension Reading Materials and Worksheet

劉徽的證明

與趙爽同期，中國的另一數學家劉徽亦發現了一奇妙證明勾股定理的方法。劉徽的方法是完全不用代數方法來作出證明。他的方法以當時文字記錄如下：

> 句[1]自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之冪，開方除之，即弦也。

<table><tr><td>

劉徽的方法：

劉徽首先作出三角形上兩條直角邊上的正方形，他把由一條直角邊形成的正方形叫做“朱方”，而另一條直角邊形成的正方形叫做“青方”(見圖一)，然後把圖中標注有“出”的那部分圖形，移到標注有“入”的那些位置，就拼成了圖中斜置的那個正方形(見圖二)。

劉徽把斜置的那個正方形叫做“弦方”，它正好是由直角三角形斜邊形成的一個正方形。

經過這樣一番移、合、拼、補，自然而然地得出了結論：

朱方+青方=弦方

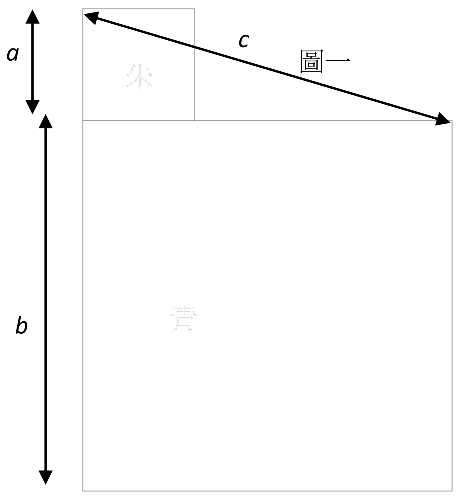
即 $a^2 + b^2 = c^2$。

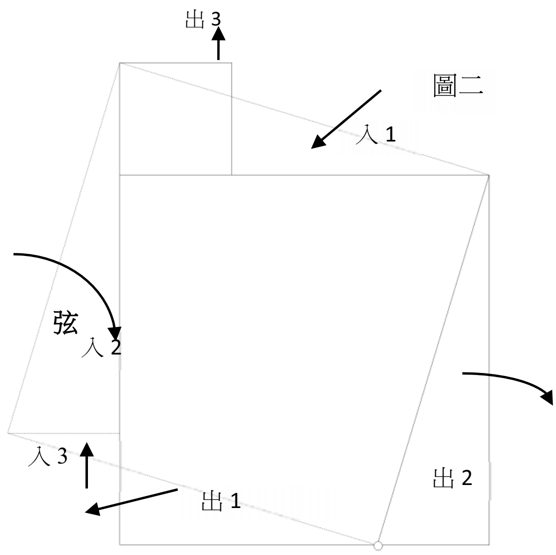
“青朱出入圖”是一幅多麼神奇的圖！它甚至不用去標注任何文字，只要相應地塗上朱、青兩種顏色，便能把蘊含於勾股定理中的數學真理，清晰地展示在世人面前。

</td></tr></table>

摘錄自李天華、許濟華編著(1995)。《數學奇觀》。第 61 頁。中國台灣：九章出版社。

註 1:“句”為“勾”字的古代用字。





Lessons 1 -2

Extension Reading Materials and Worksheet

蘆葦問題(或在印度稱為蓮花問題)

在《九章算術》的第九章 (勾股章)內的一道出名的蘆葦問題如下：

“葭生中央問題”

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊，問水深葭長各幾何?

轉為現代中文的意思如下：

有一個正方形的池塘，邊長為 1 丈[1]，有棵蘆葦生長在池塘的正中央，高出水面的部分有 1 尺長，如果把蘆葦向岸邊拉，葦頂正好能碰到池岸邊沿。問池塘水深和蘆葦的長度各是多少？

根據上文，畫出題意，並解決問題。

題解：

書內提供的題解，以近代語文寫成如下：

把池塘邊長的一半自乘，再把蘆葦出水的那部分自乘，然後相減，將所得的差除以出水數的 2 倍，就是池塘的水深，加上出水數，就是蘆葦的長度。

解釋為何以上方法能找到答案。

Lessons 1 -2

Extension Reading Materials and Worksheet

解答：

畢氏定理的名稱

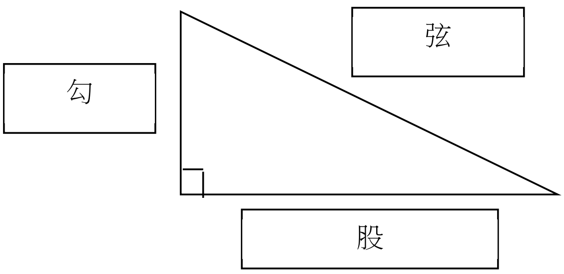
1. (a) 盡量寫出相等於畢氏定理的名稱。

   <u>勾股定理，商高定理</u>

   (b) 有多少個已知證明畢氏定理的方法？

   <u>400 多個</u>

2. 在圖中於對應位置寫出三角形內的“勾”、“股”、“弦”的名稱。



3. (a) 在希臘，畢氏定理大約於那年被“發現”出來呢？

   公元前 500 年

   (c)《周髀算經》大約於那年出現？為何不能準確說出勾股定理的出現年份？

   公元前 1 世紀至公元 1 世紀，因書中內容可能更早已出現。

   (c) 簡單解釋為何有言論指畢氏定理應稱為勾股定理。

   因為中國可能比希臘的畢達哥拉斯更早發現或證明了該定理。

<u>趙爽</u>的證明方法

證明：

$$4\left(\frac{1}{2}ab\right)=c^2-(b-a)^2$$

$$2ab=c^2-(b^2-2ab+a^2)$$

$$2ab=c^2-b^2+2ab-a^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

Lessons 1 -2

Extension Reading Materials and Worksheet

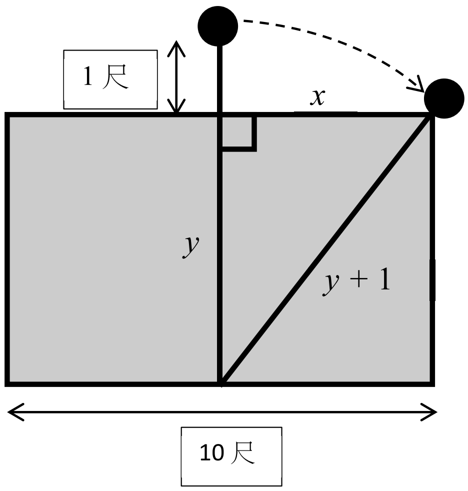
蘆葦問題(或在印度稱為蓮花問題)

畫出以上題意並解決以上問題。

題解：

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

$$y^2 + 5^2 = (y+1)^2$$
$$y^2 + 5^2 = y^2 + 2y + 1^2$$
$$5^2 - 1^2 = 2y$$
$$\frac{5^2 - 1^2}{2} = y$$



書內提供的題解，以近代語文寫成如下：

把池塘邊長的一半自乘，再把蘆葦出水的那部分自乘，然後相減，將所得的差除以出水數的 2 倍，就是池塘的水深，加上出水數，就是蘆葦的長度。

解釋為何以上方法能找到答案。 設池塘邊長為 a , 出水部分為 b .

$$y^2 + (\frac{a}{2})^2 = (y+b)^2$$

$$y^2 + (\frac{a}{2})^2 = y^2 + 2by + b^2$$

$$2by = (\frac{a}{2})^2 - b^2$$